Keplerovi pátečníci

Setkání 2.

2023/09/22

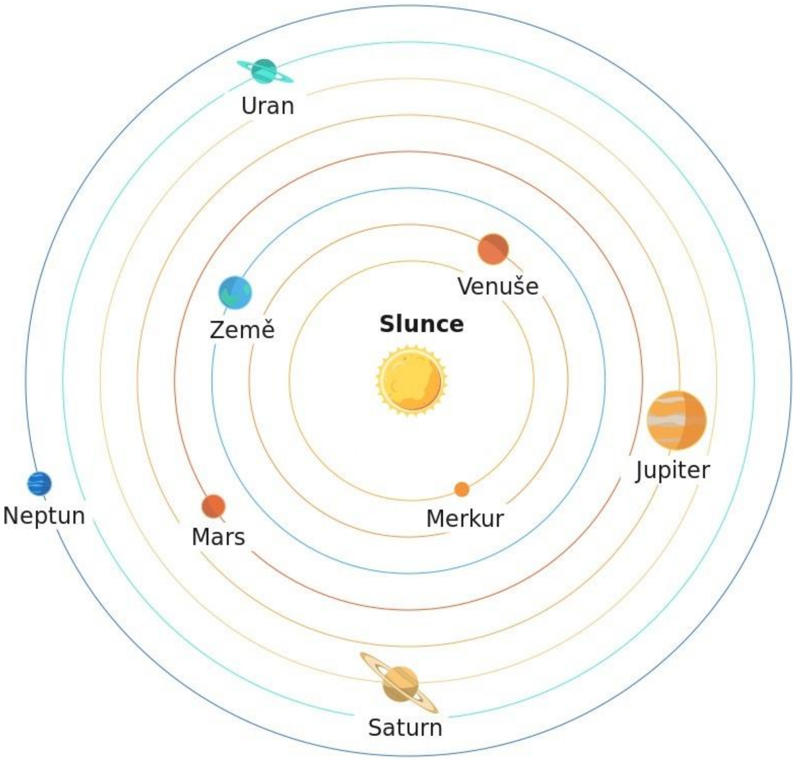
Témata pro dnešní odpoledne

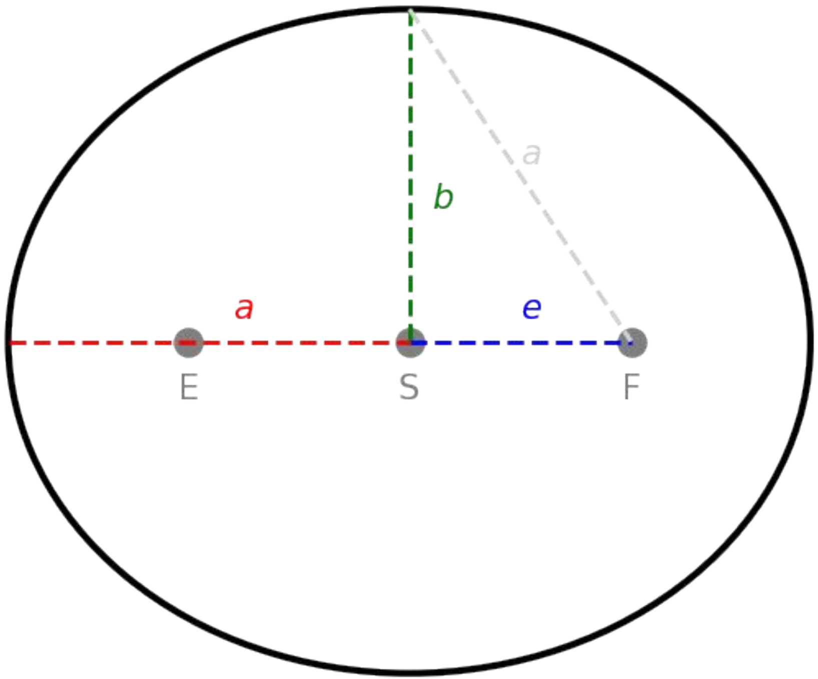
1. Opakování: Keplerovy zákony pro planety obíhající Slunce
2. Čas na příklady!
3. Zobecnění Keplerových zákonů
4. Čas na příklady!
5. Proč Keplerovy zákony platí aneb co je gravitace
6. Newtonův gravitační zákon, homogenní a radiální gravitační pole

Opakování: Keplerovy zákony

1. **Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách, málo odlišných od kružnic. Elipsy planet mají společné ohnisko, v němž se nachází Slunce. Druhá ohniska elips zůstávají prázdná.**
2. Spojnice planety a Slunce opíše za stejné časy plochy o stejném obsahu.
3. Pokud je a hlavní poloosa planety a T její oběžná doba (perioda), bude poměr mezi a^3 a T^2 vždy stejný, ať zvolíme libovolnou planetu:

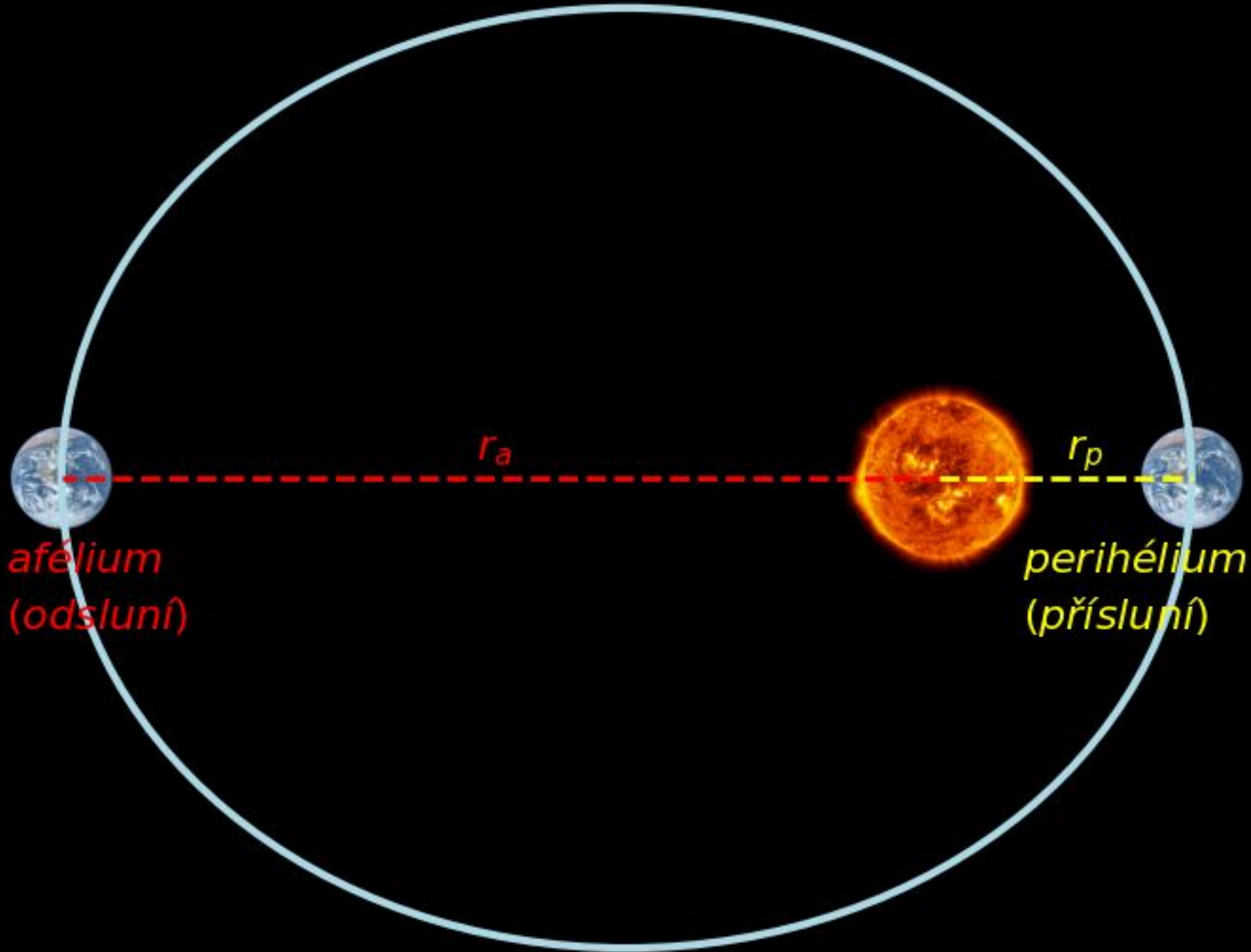
$$\frac{a^3}{T^2} = \text{konstanta}$$





Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách, která však velmi dobře připojínají kružnici.

a … hlavní poloosa *e* … výstřednost
b … vedlejší poloosa $\varepsilon = e / a$ … číselná výstřednost
Pokud $\varepsilon = 0$, resp. $e = 0$, pak kružnice!

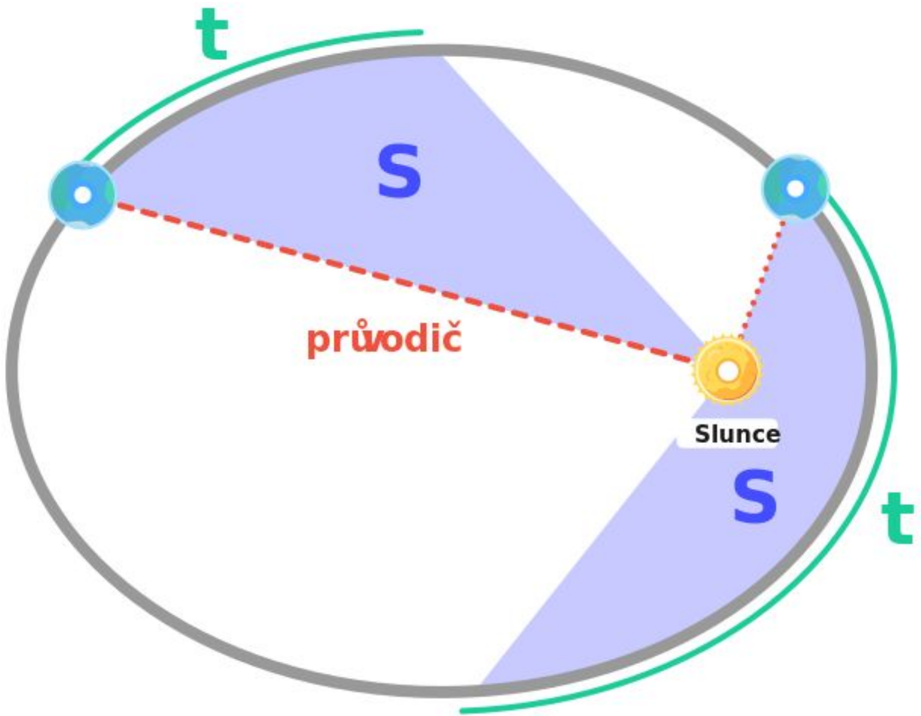


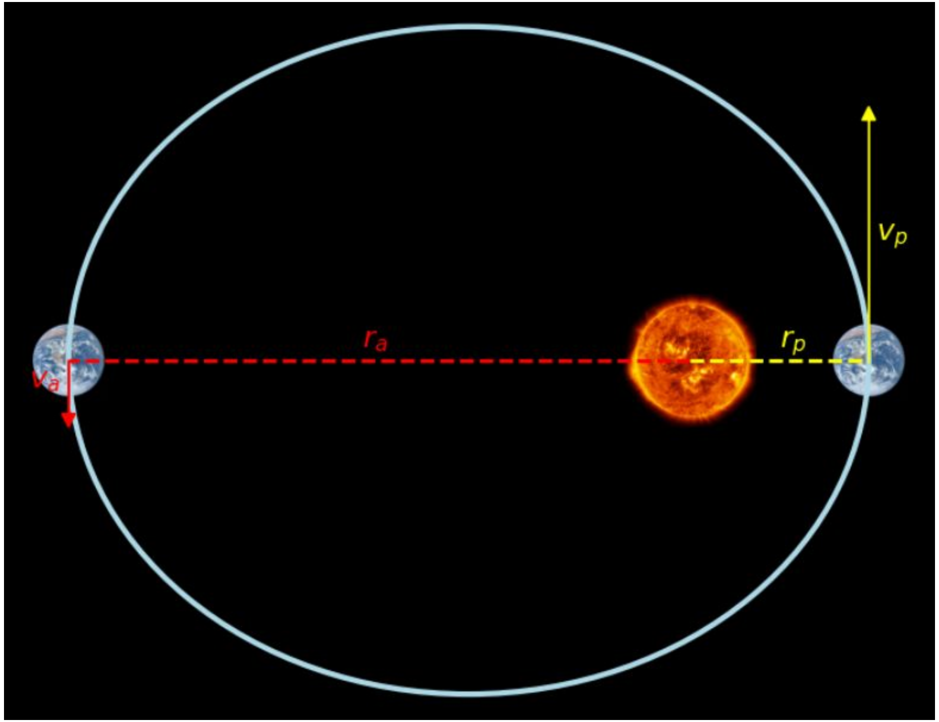
POZOR: na obrázku *ε = 0,55*, ale ve skutečnosti má Země pouhých *ε = 0,0167, tedy mnohem více připomíná kružnici*!

Opakování: Keplerovy zákony

1. Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách, málo odlišných od kružnic. Elipsy planet mají společné ohnisko, v němž se nachází Slunce. Druhá ohniska elips zůstávají prázdná.
2. **Průvodič planety a Slunce opíše za stejné časy plochy o stejném obsahu.**
3. Pokud je a hlavní poloosa planety a T její oběžná doba (perioda), bude poměr mezi a^3 a T^2 vždy stejný, ať zvolíme libovolnou planetu:

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{konstanta}$$





$$\frac{v_\mathrm{p}}{v_\mathrm{a}} = \frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{p}} = \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}$$

$$v_\mathrm{a} \leq v \leq v_\mathrm{p}$$

Opakování: Keplerovy zákony

1. Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách, málo odlišných od kružnic. Elipsy planet mají společné ohnisko, v němž se nachází Slunce. Druhá ohniska elips zůstávají prázdná.
2. Spojnice planety a Slunce opíše za stejné časy plochy o stejném obsahu.
3. **Pokud je a hlavní poloosa planety a T její oběžná doba (perioda), bude poměr mezi a^3 a T^2 vždy stejný, ať zvolíme libovolnou planetu:**

$$\frac{a^3}{T^2} = \mathrm{konstanta}$$

Opakování: Obecnější podoba 3. Keplerova zákona

Pokud je *a* v m, *T* v s, hmotnost Slunce *M* v kg, pak:

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2} M,}$$

kde $G = 6,67.10^{-11}\mathrm{N.m^2.kg^{-2}}$.

Pro přesně kruhovou trajektorii: $\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{GM}{r^3}$

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

$\boxed{v = \frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{GM}{r}}}$ … kruhová rychlost (tzv. 1. kosmická)

Čas na příklady!

Cvičení 1

Př. 1 – 4

https://keplerovipatecnici.github.io/exercises.html

Intermezzo: Hmotný střed

Úvodní příklad:

Do konce pololetí dostanete z dějepisu známky:

1, 1, 3, 2, 4, 1

Jaký je aritmetický průměr vašich známek?

$$x_{\text{arit}} = \frac{1+1+3+2+4+1}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Intermezzo: Hmotný střed

Pak vám paní učitelka řekne, že známky měly různou váhu (1-10), tj. na některé je brán větší důraz než na jiné:

Známka:	1, 1, 3, 2, 4, 1
Váha:	5, 5, 1, 10, 5, 10

Jaký je *vážený* aritmetický průměr vašich známek?

$$x_{\text{vazeny}} = \frac{5.1 + 5.1 + 1.3 + 10.2 + 5.4 + 10.1}{5 + 5 + 1 + 10 + 5 + 10} = \frac{63}{36} = 1,75$$

Intermezzo: Hmotný střed

Ilustrační příklad:

Máme 4 body na přímce *x*, jejichž poloha je

-2, 0, 1, 2

Kde leží (polohový) střed této soustavy?

$$x_{\text{stred}} = \frac{-2+0+1+2}{4} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Intermezzo: Hmotný střed

Každý bod má ale jinou hmotnost (v gramech):

Poloha:	-2, 0, 1, 2
Hmotnost (g):	5, 1, 10, 2

Kde leží *hmotný střed* této soustavy?

$$x_{\text{hmotny stred}} = \frac{5.(-2) + 1.0 + 10.1 + 2.2}{5 + 1 + 10 + 2} = \frac{4}{18} = 0,222\ldots$$

Intermezzo: Hmotný střed

Každý bod má ale jinou hmotnost (v gramech):

Poloha: -2, 0, 1, 2

Hmotnost (g): 5, 1, 10, 2

Kde leží *hmotný střed* této soustavy?

$$x_{\text{hmotny stred}} = \frac{5.(-2) + 1.0 + 10.1 + 2.2}{5 + 1 + 10 + 2} = \frac{4}{18} = 0,222\ldots$$

Hmotnosti se používají jako váhy!

Intermezzo: Hmotný střed

Definice hmotného středu:

Mějme *n* bodů s polohami a hmotnostmi:

$$\vec{r}_1, \quad \vec{r}_2, \quad \ldots, \quad \vec{r}_n$$

$$m_1, \; m_2, \; \ldots, \; m_n$$

Pak hmotný střed této soustavy je:

$$\vec{r}_{\text{hmotny stred}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

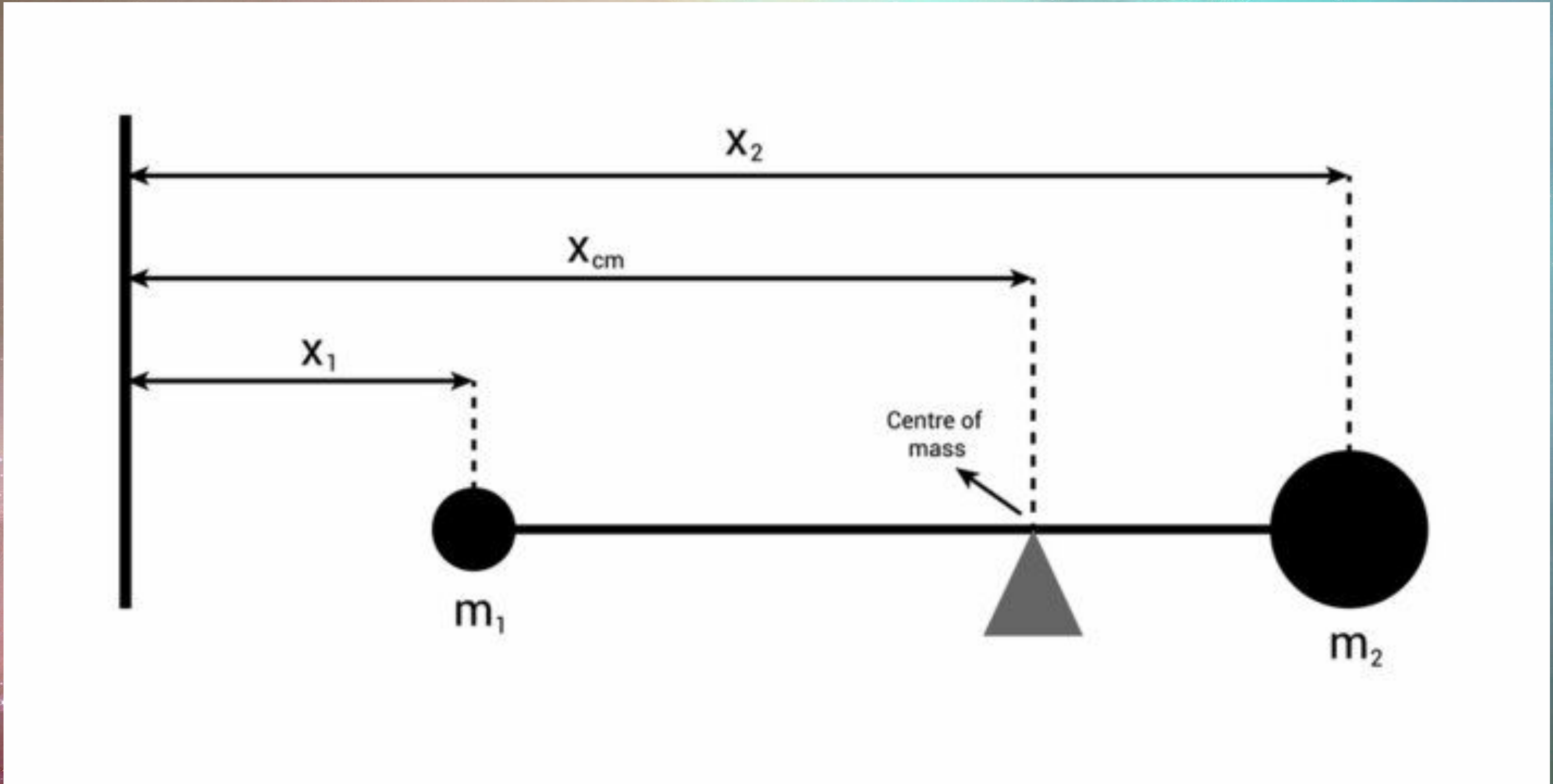
Intermezzo: Hmotný střed

2 body na přímce:

Polohy a hmotnostmi dvou bodů na přímce *x*:

$$x_1,\ x_2$$
$$m_1,\ m_2$$

$$x_{\text{hmotny stred}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



Zdroj: https://stock.adobe.com/search?k=%22center+of+mass%22

Intermezzo: Hmotný střed

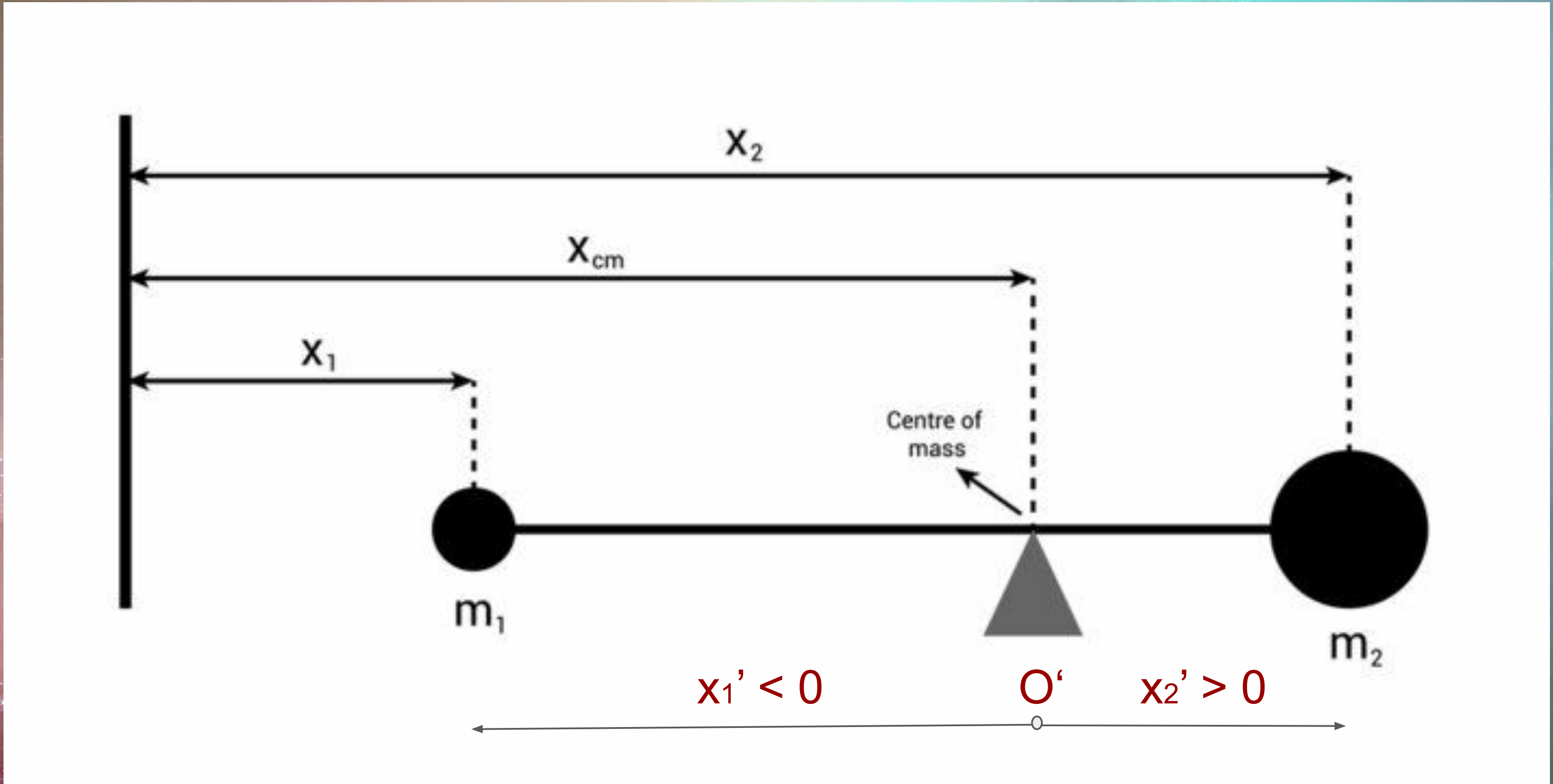
2 body na přímce:

Polohy a hmotnostmi dvou bodů na přímce *x*:

$$x_1,\ x_2 \qquad x_{\text{hmotny stred}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$m_1,\ m_2$$

Posuňme počátek na ose *x* tak, aby $x'_{\text{hmotny stred}} = 0$, čímž $x'_1 < 0,\ x'_2 > 0$:



Zdroj: https://stock.adobe.com/search?k=%22center+of+mass%22

Intermezzo: Hmotný střed

2 body na přímce:

Polohy a hmotnostmi dvou bodů na přímce *x*:

$$x_1,\ x_2 \qquad m_1,\ m_2 \qquad x_{\text{hmotny stred}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Posuňme počátek na ose *x* tak, aby $x'_{\text{hmotny stred}} = 0$, čímž $x'_1 < 0,\ x'_2 > 0$:

$$m_1 x'_1 + m_2 x'_2 = 0 \qquad m_1(-x'_1) = m_2 x'_2$$

Intermezzo: Hmotný střed

2 body na přímce:

Polohy a hmotnostmi dvou bodů na přímce *x*:

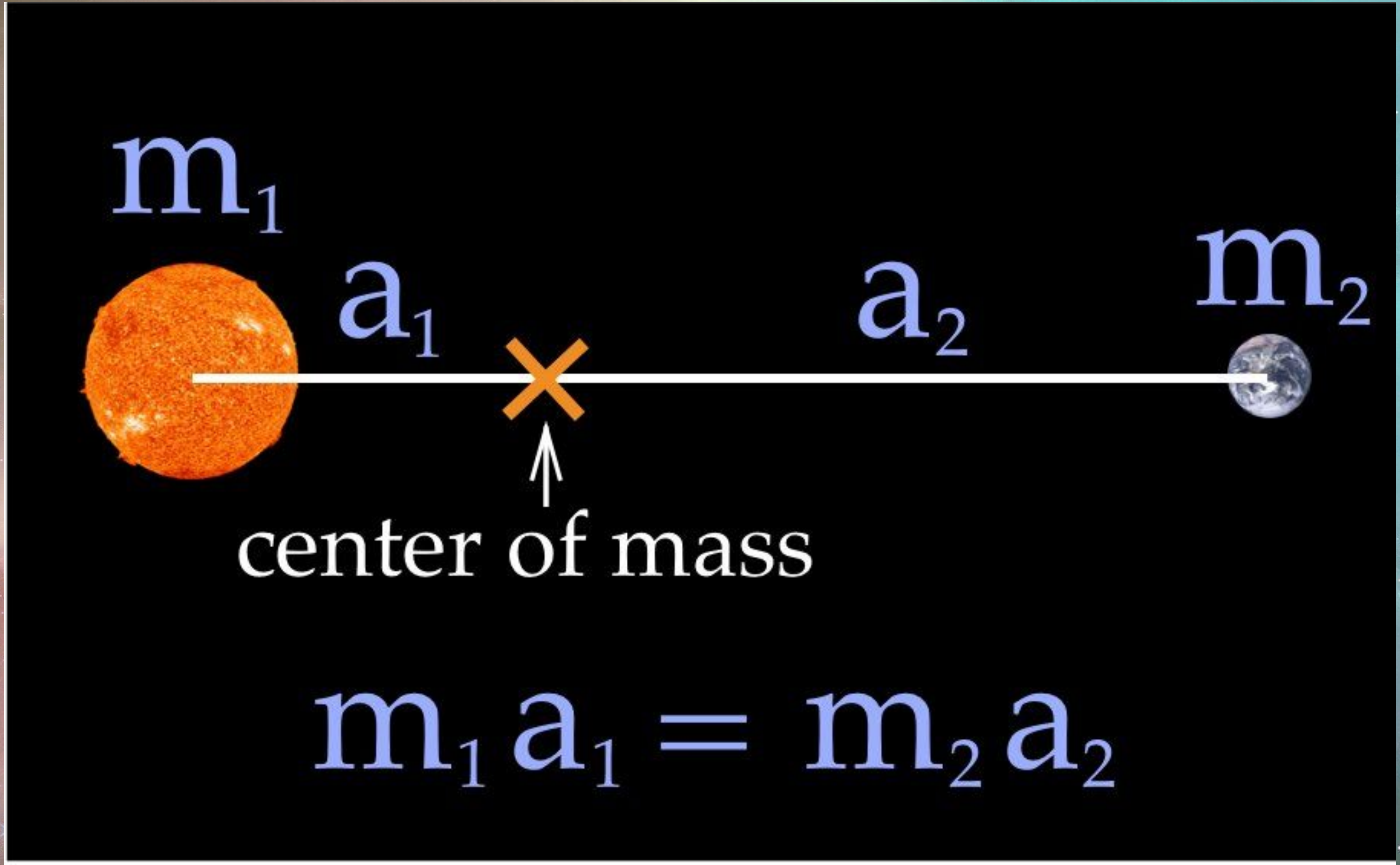
$$x_1,\ x_2 \qquad\qquad x_{\text{hmotny stred}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$m_1,\ m_2$$

Posuňme počátek na ose *x* tak, aby $x'_{\text{hmotny stred}} = 0$, čímž $x'_1 < 0,\ x'_2 > 0$:

$$m_1 x'_1 + m_2 x'_2 = 0 \qquad\qquad m_1(-x'_1) = m_2 x'_2$$

Po přeznačení: $a_1 = -x'_1,\ a_2 = x_2 : \quad m_1 a_1 = m_2 a_2$



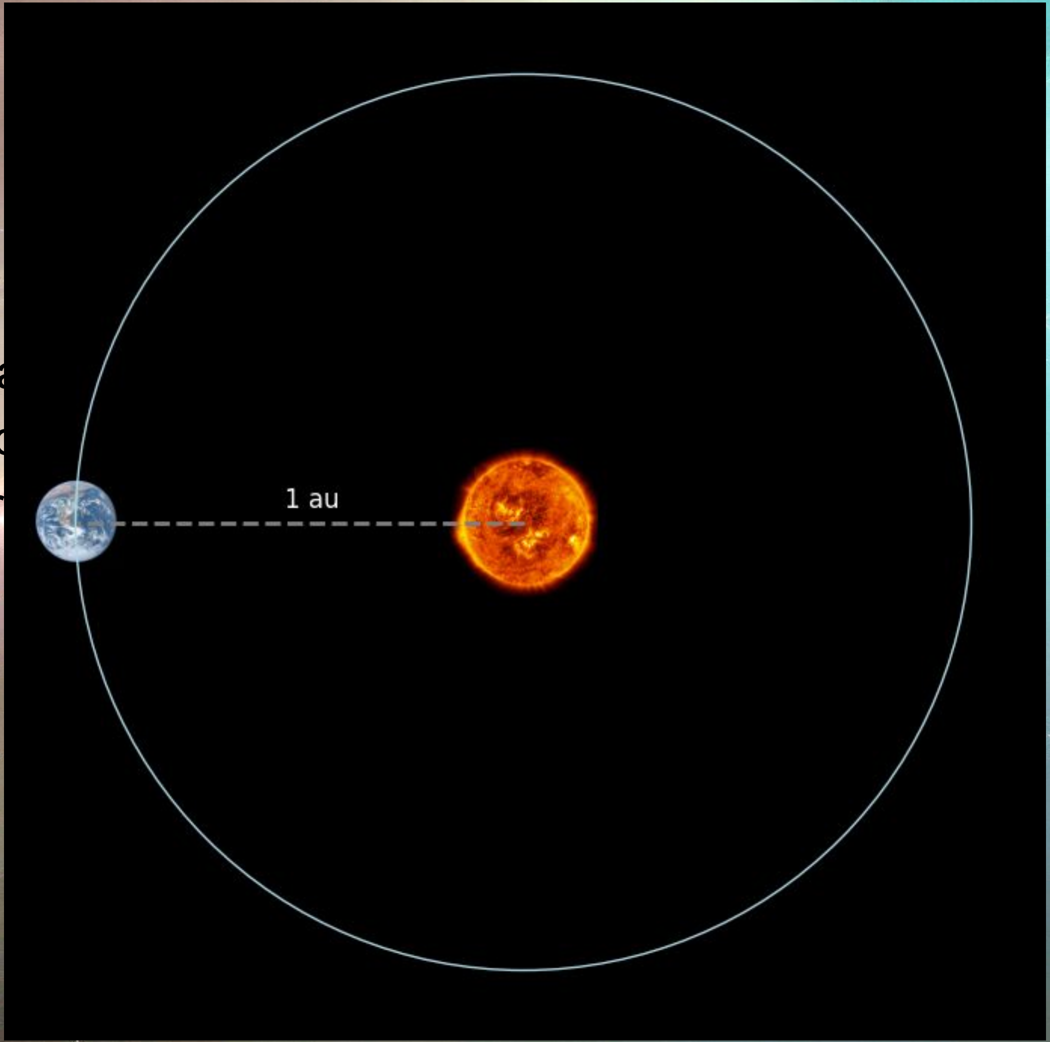
Ilustrační obrázek
(Pozor, hmotný střed by byl pro skutečnou Zemi a Slunce mnohem více posunutý ke středu Slunce)

Zobecnění Keplerových zákonů

1. *Původně:*
   a. planeta obíhá kolem Slunce
   b. výstřednost $\epsilon \simeq 0$
   c. velký rozdíl hmotností $m_{\mathrm{planeta}} \ll M_{\mathrm{Slunce}}$

Zobecnění

1. *Původně:*
   a. planeta
   b. výstřed
   c. velký r



Zobecnění Keplerových zákonů

1. *Původně:*
   a. planeta obíhá kolem Slunce → jiné systémy?
   b. výstřednost $\epsilon \simeq 0$ → větší ϵ ?
   c. velký rozdíl hmotností $m_{\mathrm{planeta}} \ll M_{\mathrm{Slunce}}$ → libovolný poměr?

Zobecnění Keplerových zákonů

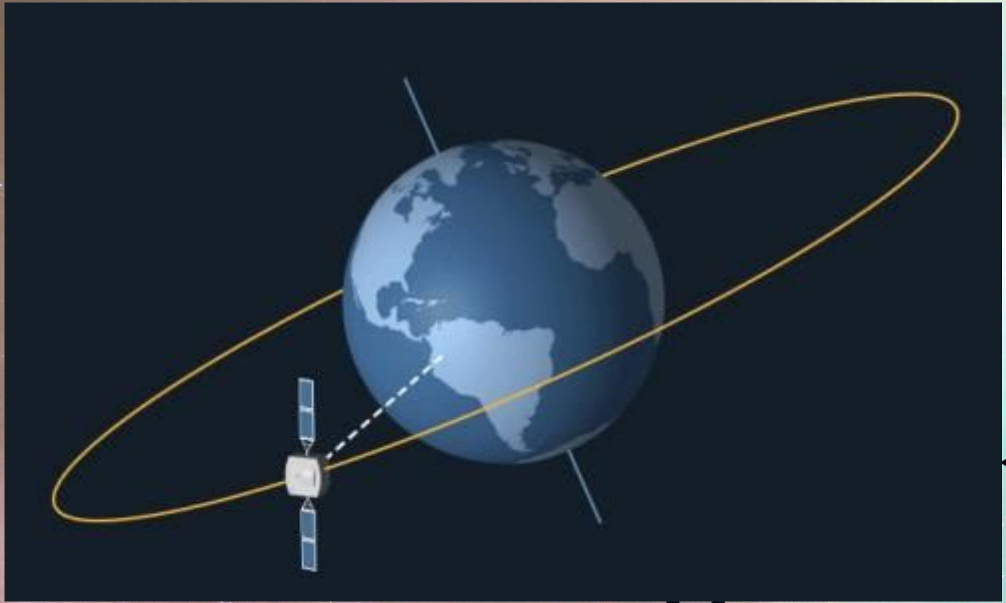
1. *Původně:*
   a. planeta obíhá kolem Slunce → jiné systémy?
   b. výstřednost $\epsilon \simeq 0$ → větší ϵ ?
   c. velký rozdíl hmotností $m_{\mathrm{planeta}} \ll M_{\mathrm{Slunce}}$ → libovolný poměr?

Zobecnění:

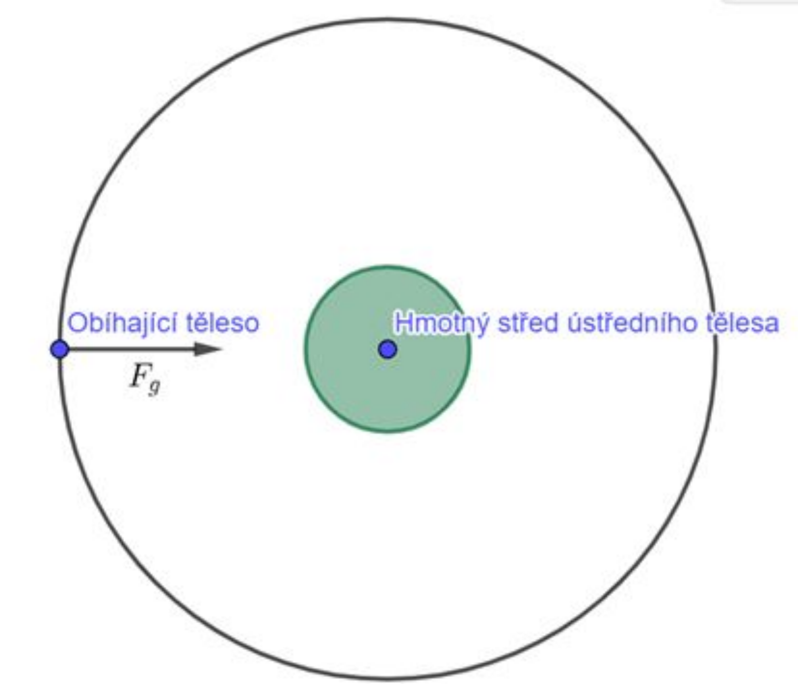
a., b. pokud $m \ll M$, platí zákony v prakticky ve stejném tvaru,

jen lehčí těleso obíhá kolem hmotného středu hmotnějšího tělesa

Př: Slunce – kometa, Země – družice, Jupiter – jeho měsíc, …



ů



a., b. pokud $m \ll M$, platí zákony v

jen lehčí těleso obíhá kolem hmot

Př: Slunce – kometa, Země – druž

Zobecn

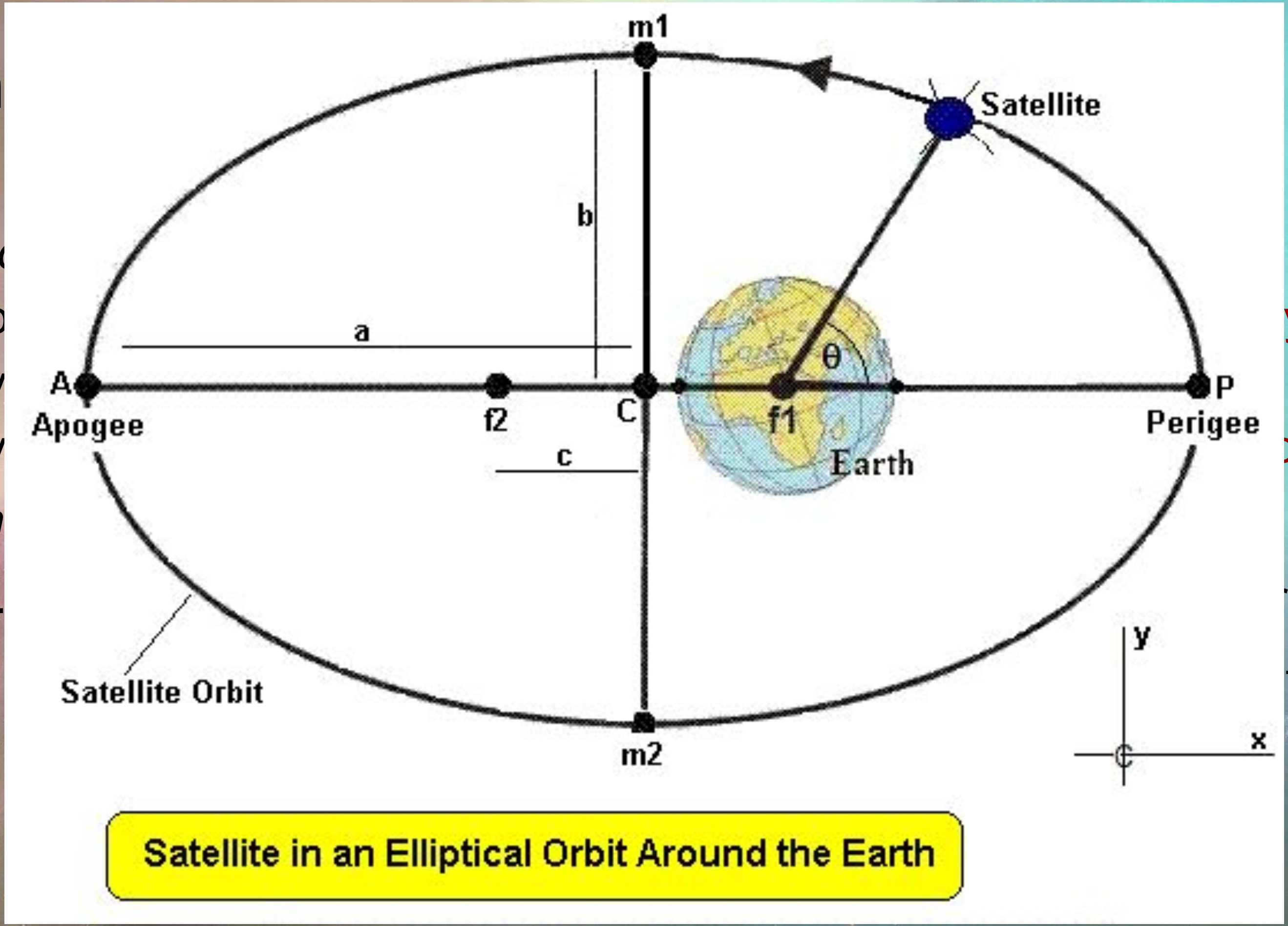
1. *Původ*
   a. p … ystémy?
   b. v … ∈ ?
   c. v … olný poměr?

Zobecněn

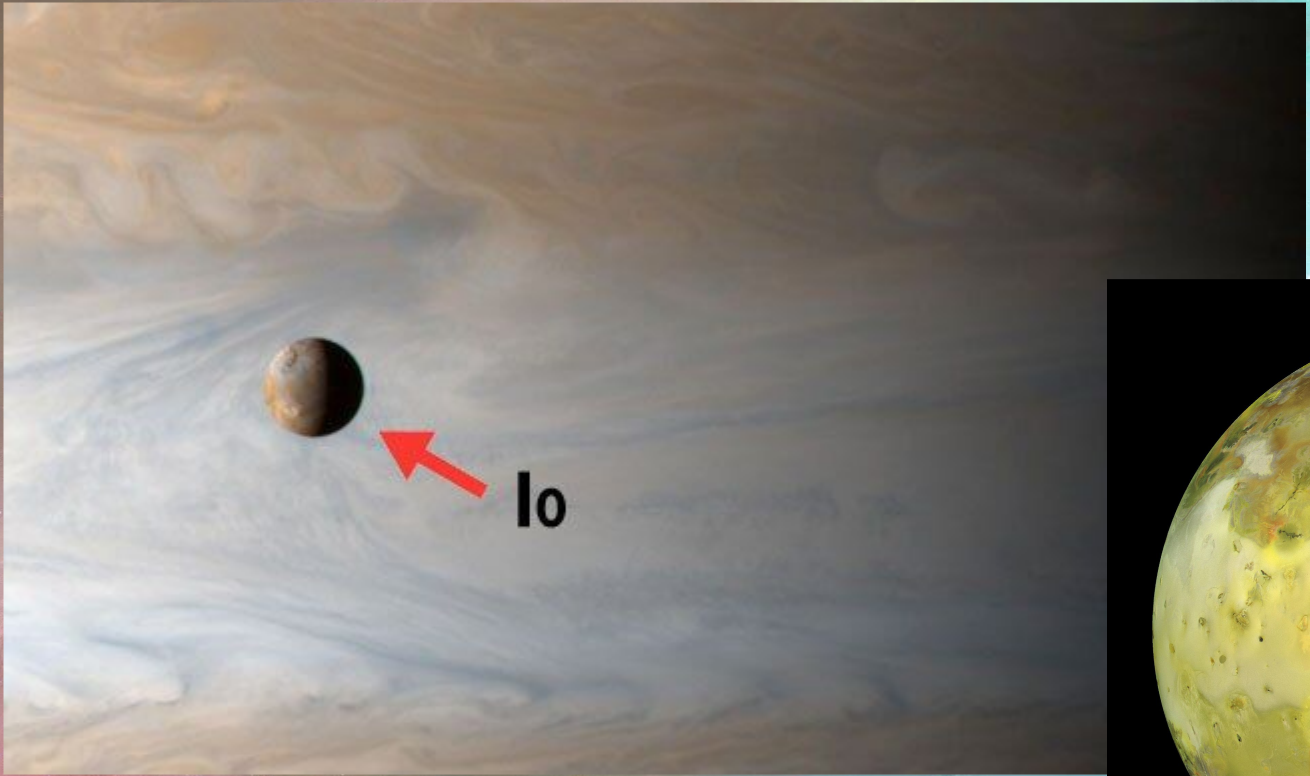
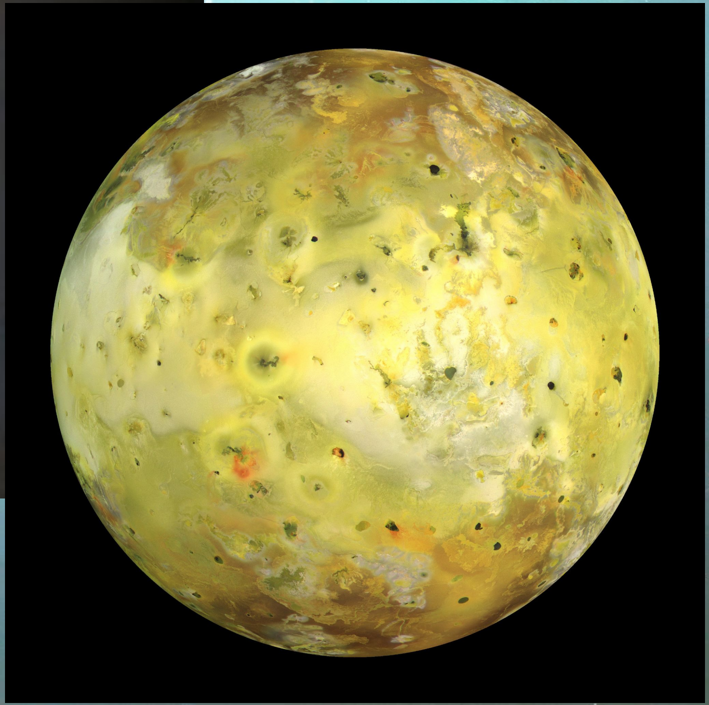
a., b. … u,

tělesa

…



Zdroj: https://www.spaceacademy.net.au/watch/track/orbspec.htm


Io


Zobecnění Keplerových zákonů

1. *Původně:*
   a. planeta obíhá kolem Slunce → jiné systémy?
   b. výstřednost $\epsilon \simeq 0$ → větší ϵ ?
   c. velký rozdíl hmotností $m_{\mathrm{planeta}} \ll M_{\mathrm{Slunce}}$ → libovolný poměr?

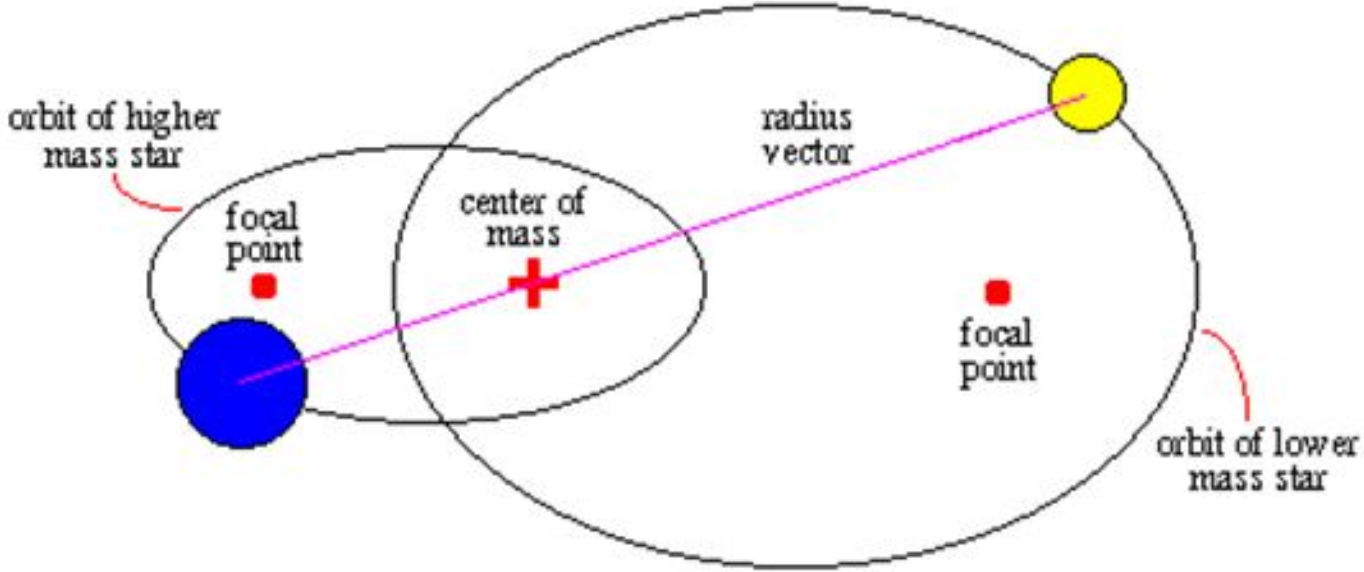
Zobecnění:

a., b. pokud $m \ll M$, platí zákony v prakticky ve stejném tvaru,
jen lehčí těleso obíhá kolem hmotného středu hmotnějšího tělesa
Př: Slunce – kometa, Země – družice, Jupiter – jeho měsíc, …

c. Obě tělesa obíhají po elipsách, přitom sdílí ohnisko
Př.: Dvojhvězda

Zdroj: https://en.wikipedia.org/wiki/Binary_star#Eclipsing_binaries

Binary Star Orbit



Zobecněné Keplerovy zákony

1. **Každé z těles obíhá po své vlastní elipse, přitom jedno ohnisko spolu sdílejí a v něm se nachází hmotný střed soustavy (tzv. “barycentrum”).**

   Tělesa se nachází vždy na opačné straně vůči sobě vzhledem k hmotném středu soustavy, viz obrázek. Navíc platí, ze relativní výstřednosti obou elips jsou stejné, stejně tak jejich oběžné doby.

   Tělesům říkáme “komponenty” binárního systému. Čím je komponenta hmotnější v porovnání s druhou, tím menší hlavní poloosu bude mít.

Zobecněné Keplerovy zákony

1. Každé z těles obíhá po své vlastní elipse, přitom jedno ohnisko spolu sdílejí a v něm se nachází hmotný střed soustavy (tzv. “barycentrum”).

   Tělesa se nachází vždy na opačné straně vůči sobě vzhledem k hmotném středu soustavy, viz obrázek. Navíc platí, ze relativní výstřednosti obou elips jsou stejné, stejně tak jejich oběžné doby.

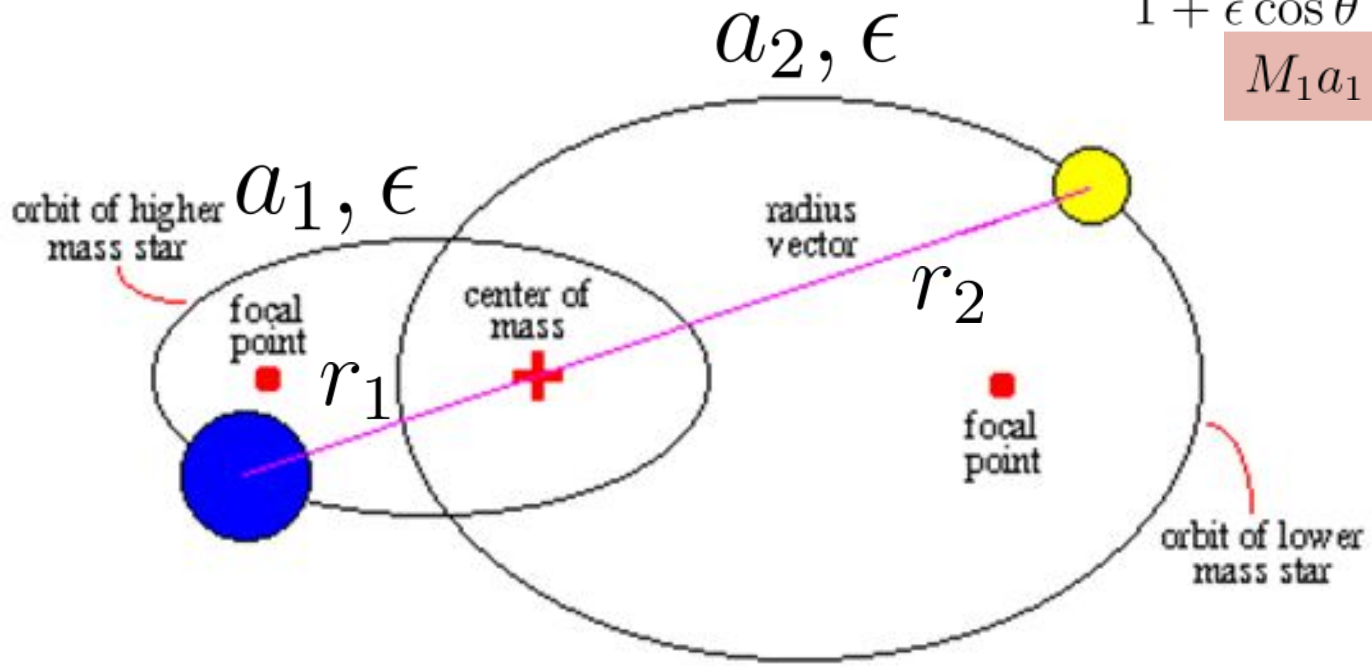
   Tělesům říkáme “komponenty” binárního systému. Čím je komponenta hmotnější v porovnání s druhou, tím menší hlavní poloosu bude mít.

Binary Star Orbit

$$M_1 r_1 = M_2 r_2$$

$$M_1 \frac{a_1(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\theta} = M_2 \frac{a_3(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\theta}$$

$$M_1 a_1 = M_2 a_2$$



Zobecněné Keplerovy zákony

1. Každé z těles obíhá po své vlastní elipse, přitom jedno ohnisko spolu sdílejí a v něm se nachází hmotný střed soustavy (tzv. “barycentrum”).

   Tělesa se nachází vždy na opačné straně vůči sobě vzhledem k hmotném středu soustavy, viz obrázek dříve. Navíc platí, ze relativní výstřednosti obou elips jsou stejné, stejně tak jejich oběžné doby.

Tělesům říkáme “komponenty” binárního systému. Čím je komponenta hmotnější v porovnání s druhou, tím menší hlavní poloosu bude mít.

Zobecněné Keplerovy zákony

2. **Průvodič každého tělesa opíše za stejné časy plochy o stejných obsazích.**
3. Pokud jsou hlavní poloosy elips a_1, a_2, hmotnosti komponent M_1, M_2 a jejich společná perioda T, pak tyto veličiny splňují:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2}(M_1 + M_2)$$

kde $a = a_1 + a_2$

Zobecněné Keplerovy zákony

2. Průvodič každého tělesa opíše za stejné časy plochy o stejných obsazích.
3. **Pokud jsou hlavní poloosy elips a_1, a_2, hmotnosti komponent M_1, M_2 a jejich společná perioda T, pak tyto veličiny splňují:**

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2}(M_1 + M_2)$$

kde $a = a_1 + a_2$

Zobecněné Keplerovy zákony

2. Průvodič každého tělesa opíše za stejné časy plochy o stejných obsazích.
3. **Pokud jsou hlavní poloosy elips a_1, a_2, hmotnosti komponent M_1, M_2 a jejich společná perioda T, pak tyto veličiny splňují:**

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2}(M_1 + M_2)$$

obě hmotnosti

kde $a = a_1 + a_2$

součet hlavních poloos

Speciální případ $M_2 \ll M_1$

Příklad: Merkur obíhá kolem Slunce:

$$M_2 = 3,3 \times 10^{23}\ \mathrm{kg},\ \ M_1 = 2,0 \times 10^{30}\ \mathrm{kg},\ \ \frac{M_2}{M_1} = 1,65 \times 10^{-7}$$

Speciální případ $M_2 \ll M_1$

Příklad: Merkur obíhá kolem Slunce:

$$M_2 = 3,3 \times 10^{23}\ \mathrm{kg},\ \ M_1 = 2,0 \times 10^{30}\ \mathrm{kg},\ \ \frac{M_2}{M_1} = 1,65 \times 10^{-7}$$

Pak: $M_1 + M_2 \doteq M_1$

$$a_1 = \frac{M_2}{M_1} a_2 \ll a_2$$

$$a = a_1 + a_2 \doteq a_2$$

Speciální případ $M_2 \ll M_1$

Příklad: Merkur obíhá kolem Slunce:

$$M_2 = 3,3 \times 10^{23}\ \mathrm{kg},\ \ M_1 = 2,0 \times 10^{30}\ \mathrm{kg},\ \ \frac{M_2}{M_1} = 1,65 \times 10^{-7}$$

Pak: $M_1 + M_2 \doteq M_1$

$$a_1 = \frac{M_2}{M_1} a_2 \ll a_2 \quad \longrightarrow \quad \frac{a_2^3}{T^2} \doteq \frac{G}{4\pi^2} M_1$$

$$a = a_1 + a_2 \doteq a_2$$

Jakoby $a_1 = 0$ a to významně hmotnější těleso se nepohybuje. Ve skutečnosti je to jenom aproximace, třebaže i velmi dobrá.

Slunce a Jupiter

Data o Slunci a Jupiteru:

$$a_{\text{Jupiter}} = 5,2 \text{ au}$$
$$M_{\text{Jupiter}} = 1,9 \times 10^{27} \text{ kg}$$
$$M_{\text{Slunce}} = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$$

Slunce a Jupiter

Data o Slunci a Jupiteru:

$$a_{\text{Jupiter}} = 5,2\ \text{au}$$
$$M_{\text{Jupiter}} = 1,9 \times 10^{27}\ \text{kg}$$
$$M_{\text{Slunce}} = 2,0 \times 10^{30}\ \text{kg}$$

$$\begin{aligned} a_{\text{Slunce}} &= \frac{M_{\text{Jupiter}}}{M_{\text{Slunce}}} a_{\text{Jupiter}} \\ &= \frac{1,9 \times 10^{27}}{2,0 \times 10^{30}} 5,2\ \text{au} \\ &\doteq 4,9 \times 10^{-3}\ \text{au} \\ &= 735000\ \text{km} \end{aligned}$$

Slunce a Jupiter

Data o Slunci a Jupiteru:

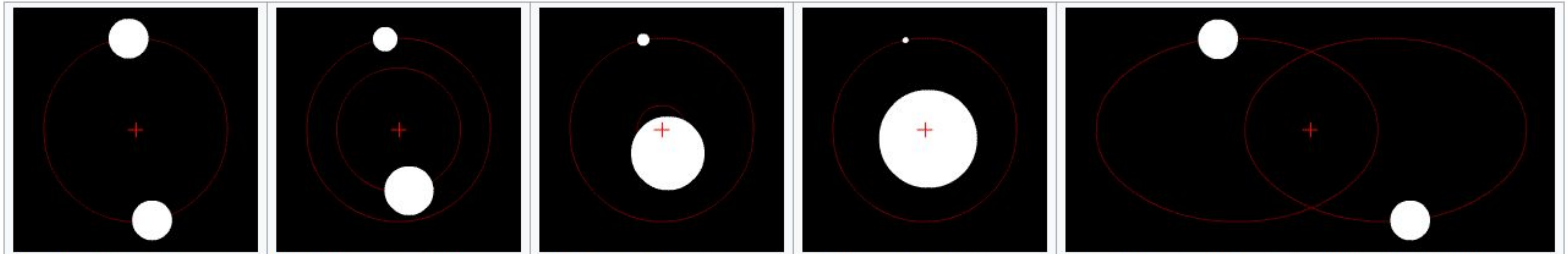
$$a_{\text{Jupiter}} = 5,2\ \text{au}$$
$$M_{\text{Jupiter}} = 1,9 \times 10^{27}\ \text{kg}$$
$$M_{\text{Slunce}} = 2,0 \times 10^{30}\ \text{kg}$$

$$\begin{aligned} a_{\text{Slunce}} &= \frac{M_{\text{Jupiter}}}{M_{\text{Slunce}}} a_{\text{Jupiter}} \\ &= \frac{1,9 \times 10^{27}}{2,0 \times 10^{30}} 5,2\ \text{au} \\ &\doteq 4,9 \times 10^{-3}\ \text{au} \\ &= 735000\ \text{km} \end{aligned}$$

Pro srovnání, poloměr Slunce je $R_{\text{Slunce}} = 696340\ \text{km}$

Hmotný střed Slunce - Jupiter leží v ně Slunce!
I tak pro praktické výpočty lze pohyb Slunce často/někdy ignorovat.

Různé situace podle hmotností



(a) Two bodies of similar mass orbiting around a common center of mass, or *barycenter*

(b) Two bodies with a difference in mass orbiting around a common barycenter, like the Charon–Pluto system

(c) Two bodies with a major difference in mass orbiting around a common barycenter (similar to the Earth–Moon system)

(d) Two bodies with an extreme difference in mass orbiting around a common barycenter (similar to the Sun–Earth system)

(e) Two bodies with similar mass orbiting in an ellipse around a common barycenter

Zdroj: https://en.wikipedia.org/wiki/Binary_star#Center-of-mass_animations

Čas na příklady!

Cvičení 1

Př. 5 – 10

https://keplerovipatecnici.github.io/exercises.html

Proč Keplerovy zákony platí aneb co je gravitace

Proč Keplerovy zákony platí aneb co je gravitace

Gravitace

= jev, kdy jsou k sobě všechna hmotná tělesa přitahována k sobě navzájem

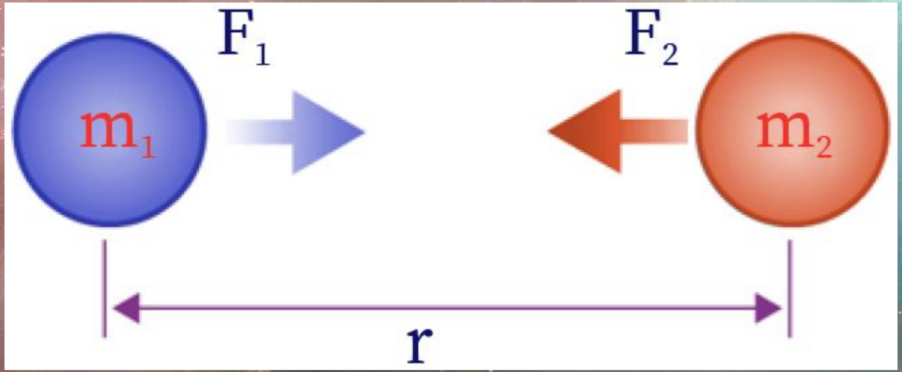
Proč Keplerovy zákony platí aneb co je gravitace

Gravitace

= jev, kdy jsou k sobě všechna hmotná tělesa přitahována k sobě navzájem

Gravitační síla

= síla, s jakou se k sobě tělesa přitahují kvůli gravitaci



$$F_1 = F_2 = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

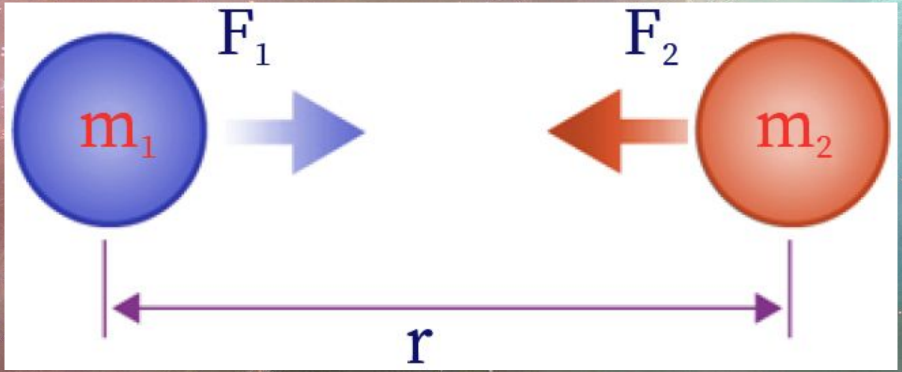
Proč Keplerovy zákony platí aneb co je gravitace

Gravitace

= jev, kdy jsou k sobě všechna hmotná tělesa přitahována k sobě navzájem

Gravitační síla

= síla, s jakou se k sobě tělesa přitahují kvůli gravitaci



$$F_1 = F_2 = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Newtonův gravitační zákon

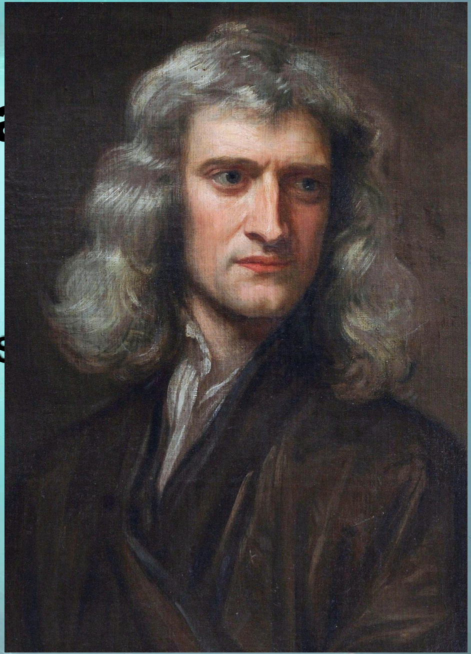
Proč Keplerovy zákony platí aneb co je gra

Gravitace

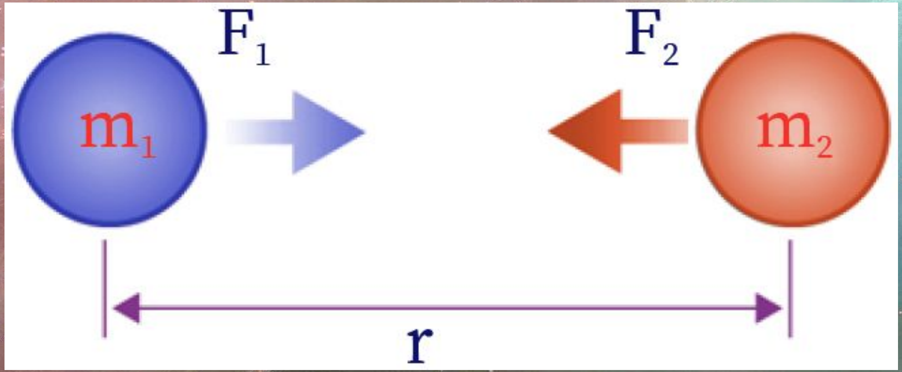
= jev, kdy jsou k sobě všechna hmotná tělesa přitahována k s

Gravitační síla

= síla, s jakou se k sobě tělesa přitahují kvůli gravitaci



Issac Newton

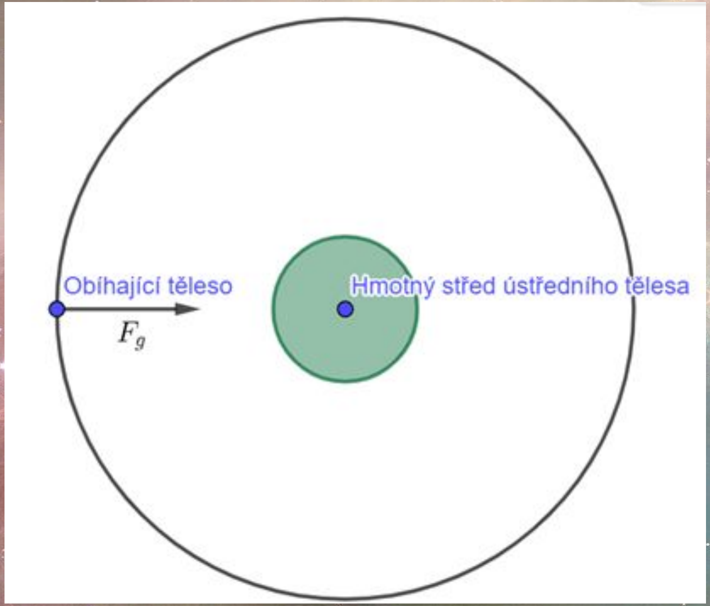


$$F_1 = F_2 = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Newtonův gravitační zákon

Musí být zákon tak komplikovaný?

- Podívejme se na pohyb po kružnici:



$$F_\mathrm{G} = F_\mathrm{d}$$

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

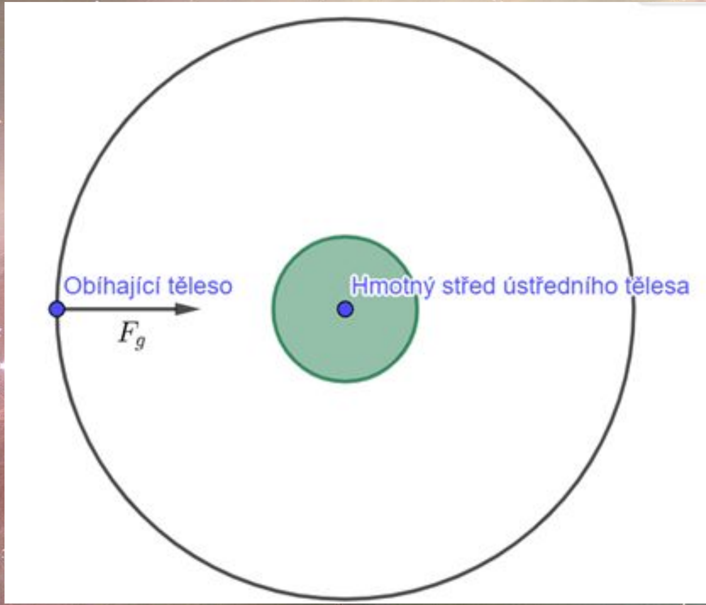
$$\frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2}M$$

$$\frac{r^3}{T^2} = \mathrm{konstanta}$$

Musí být zákon tak komplikovaný?

- Podívejme se na pohyb po kružnici:



gravitační síla hraje roli dostředivé síly

$$F_\mathrm{G} = F_\mathrm{d}$$

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

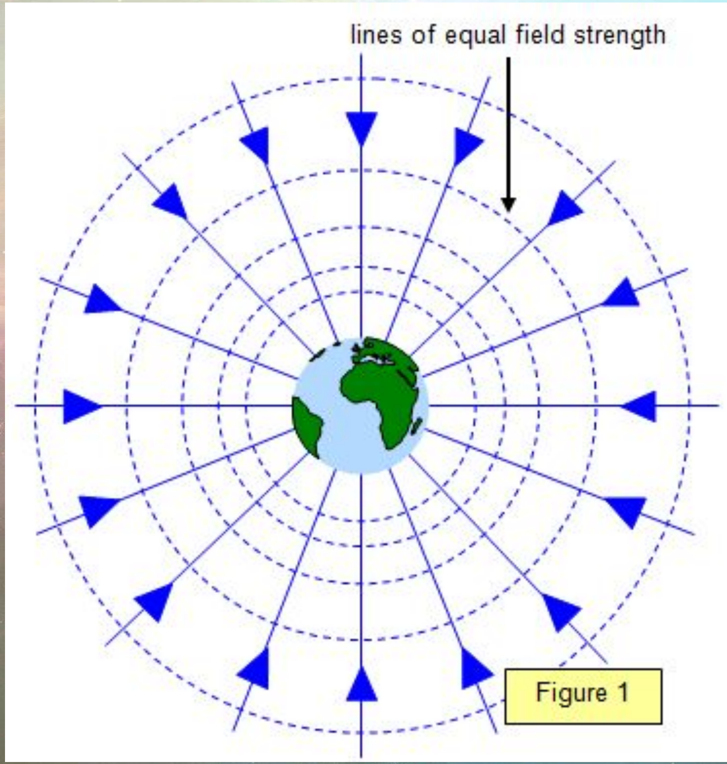
$$\frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2}M$$

$$\frac{r^3}{T^2} = \mathrm{konstanta}$$

3. Keplerův zákon!

Radiální a homogenní gravitační pole



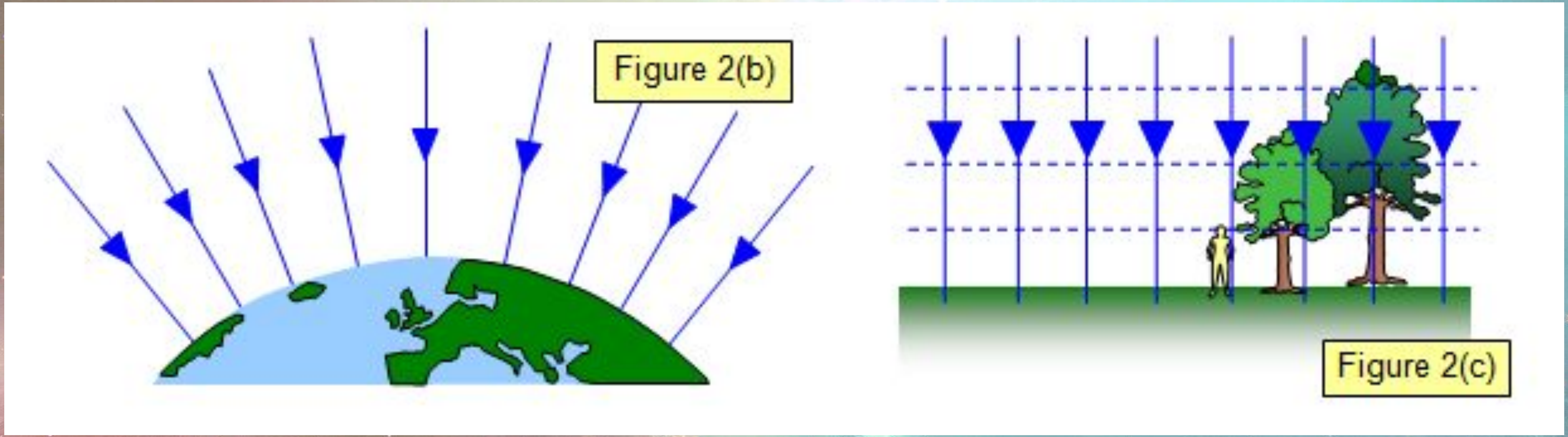
$$F_{\mathrm{G}} = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$I = \frac{F_{\mathrm{G}}}{m} = G\frac{M}{r^2}$$

Intenzita gravitačního pole

Zdroj:
https://www.schoolphysics.co.uk/age16-19/Mechanics/Gravitation/text/Gravitational_potential_gradient/index.html

Radiální a homogenní gravitační pole



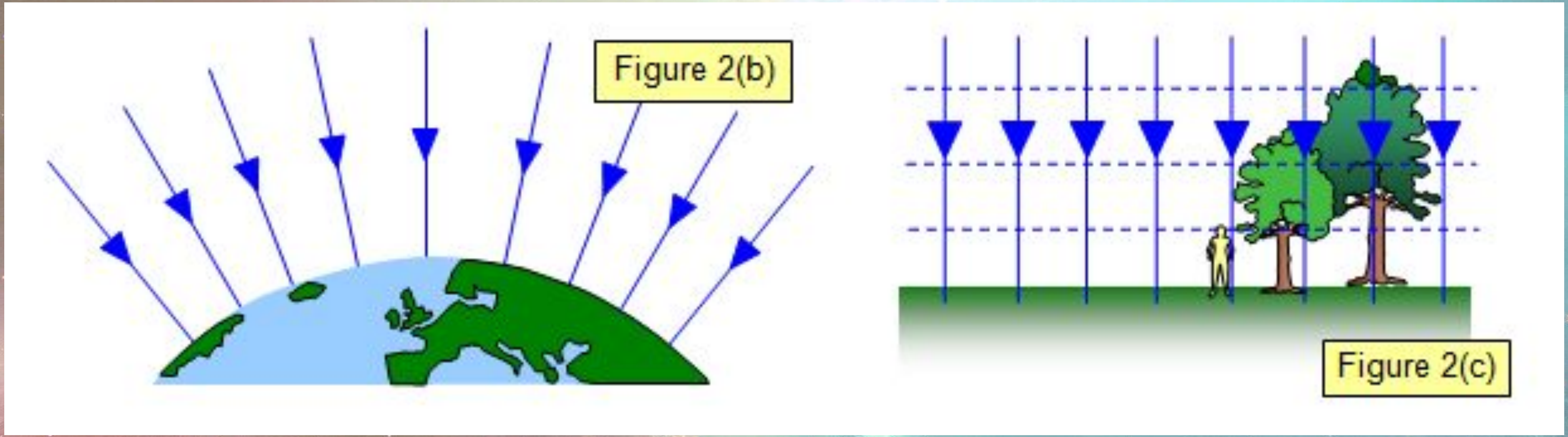
$$F_{\mathrm{G}} = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$I = \frac{F_{\mathrm{G}}}{m} = G\frac{M}{r^2}$$

$$I = G\frac{M}{R^2} = \text{konstanta} = g$$

$$F_{\mathrm{G}} = mg$$

Radiální a homogenní gravitační pole



$$E_p = -G\frac{Mm}{r}$$

$$E_p = mgh$$

Radiální a homogenní gravitační pole

- Přechod od radiálního k homogennímu poli:

$$E_p = -\frac{GMm}{R+h} = -\frac{GMm}{R}\frac{1}{1+\frac{h}{R}}$$

$$\frac{1}{1+\frac{h}{R}} = \left(1+\frac{h}{R}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{h}{R} \quad \leftarrow (1+x)^n \approx 1 + nx$$

pro *x* malé

$$\rightarrow$$

$$E_p = \frac{GMm}{R^2}h + \text{konst.} = mgh + \text{konst.}$$

konstantu lze ignorovat