Keplerovi pátečníci

Setkání 3.

2023/10/13

Témata pro dnešní odpoledne

1. Čas na příklady!
2. Proč Keplerovy zákony platí aneb co je gravitace
3. Newtonův gravitační zákon
4. Gaussova věta a sférická symetrie
5. Homogenní a radiální gravitační pole
5. Pohyb po kruhové dráze v centrálním poli – zápornost celkové energie
6. Jiné trajektorie než kruhová, viriálová věta

Čas na příklady!

Cvičení 1

Př. 6 – 10

https://keplerovipatecnici.github.io/exercises.html

Proč Keplerovy zákony platí aneb co je gravitace

Proč Keplerovy zákony platí aneb co je gravitace

- Gravitace

  = jev, který spočívá v přitahování všech hmotných těles k sobě navzájem

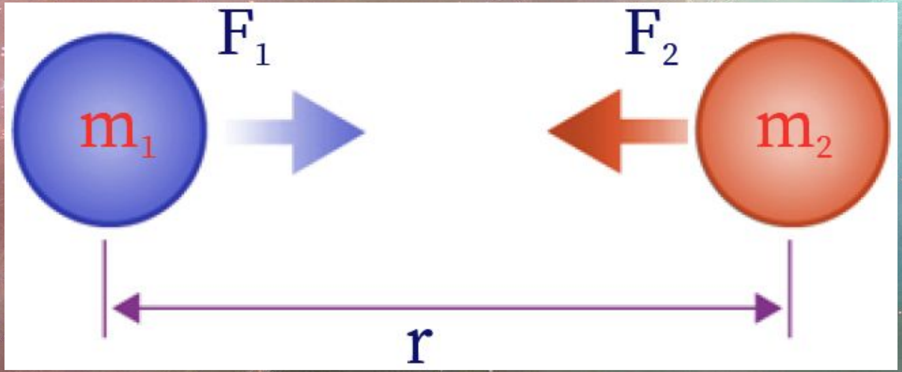
Proč Keplerovy zákony platí aneb co je gravitace

- Gravitace

  = jev, který spočívá v přitahování všech hmotných těles k sobě navzájem

- Gravitační síla

  = síla, s jakou se k sobě tělesa přitahují kvůli gravitaci



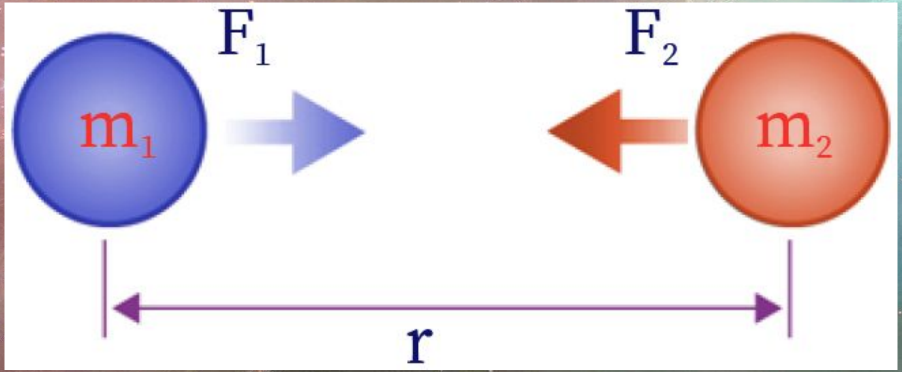
Proč Keplerovy zákony platí aneb co je gravitace

Gravitace

= jev, který spočívá v přitahování všech hmotných těles k sobě navzájem

Gravitační síla

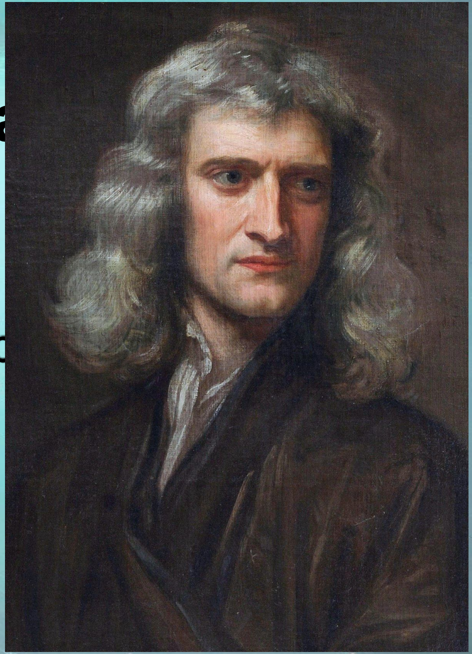
= síla, s jakou se k sobě tělesa přitahují kvůli gravitaci



$$F_1 = F_2 = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Newtonův gravitační zákon

Proč Keplerovy zákony platí aneb co je gra



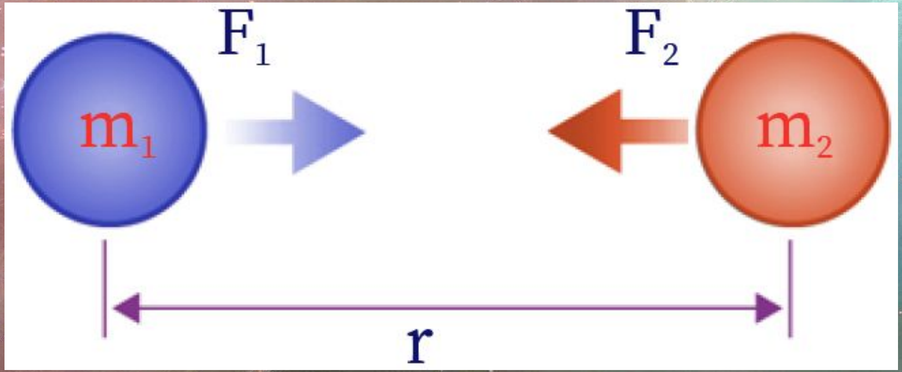
Issac Newton

Gravitace

= jev, který spočívá v přitahování všech hmotných těles k sob

Gravitační síla

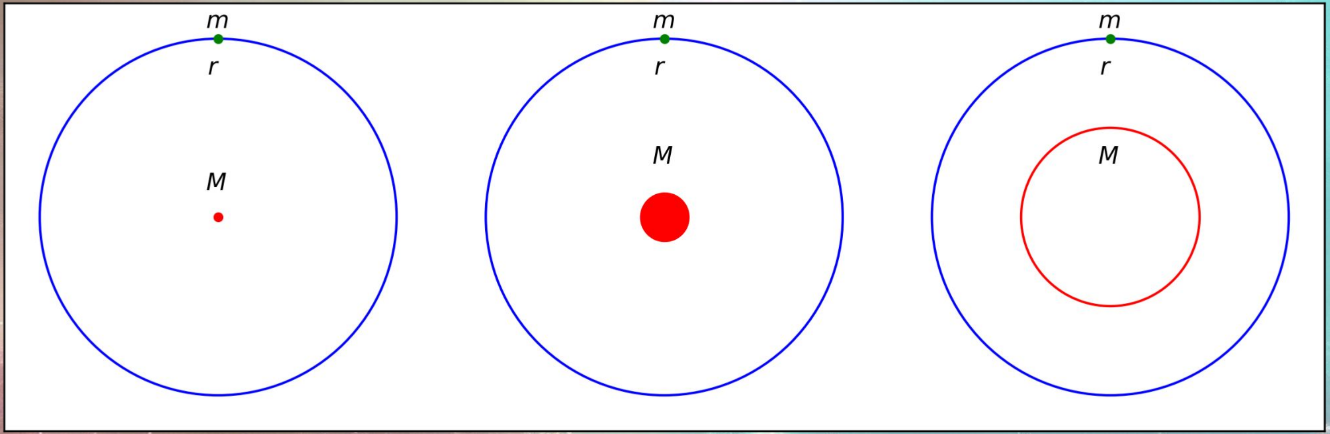
= síla, s jakou se k sobě tělesa přitahují kvůli gravitaci



$$F_1 = F_2 = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Newtonův gravitační zákon

Gaussova věta a sférická symetrie – 1



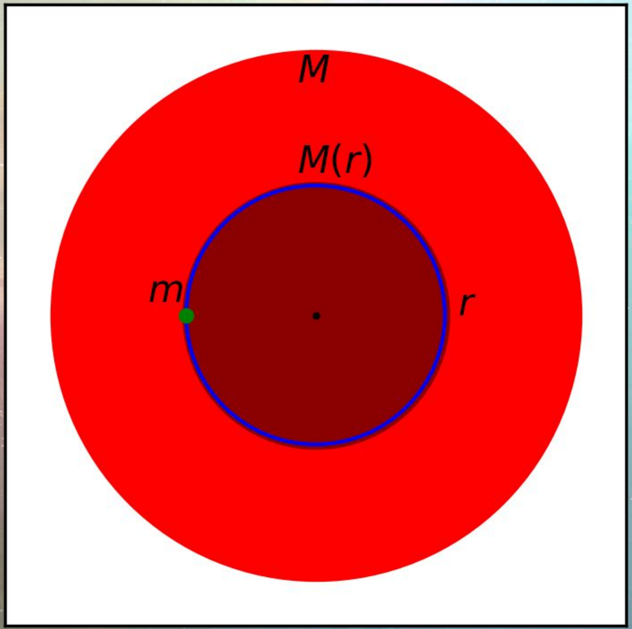
Bod *Homogenní koule* *Homogenní vrstva*

Vně gravitační pole vypadá stejně a platí:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

Gaussova věta a sférická symetrie – 2

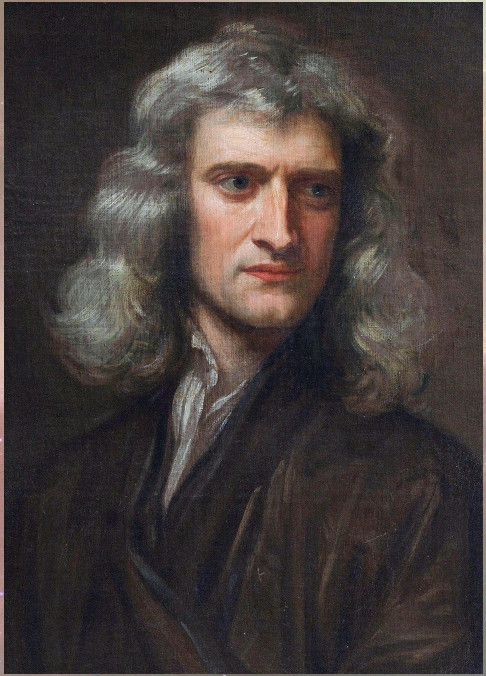
Homogenní koule:



$$F = G\frac{M(r)m}{r^2}$$

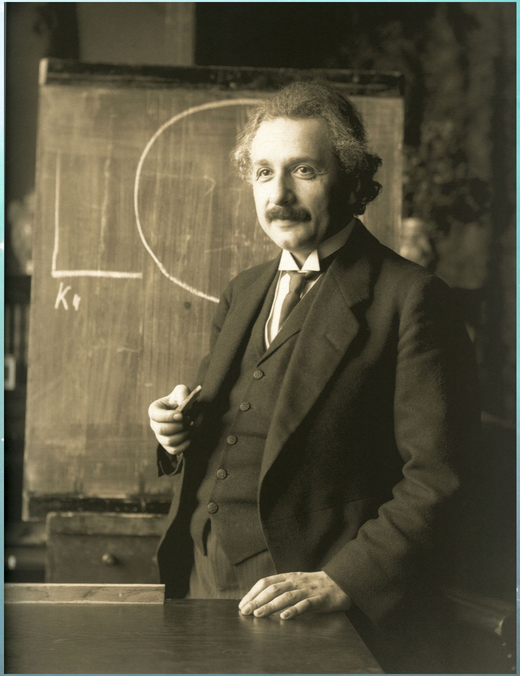
Uplatňuje se hmotnost pod slupkou o poloměru *r*.

Vsuvka: Jaký je dnešní pohled na gravitaci?



Issac Newton (1643-1727)

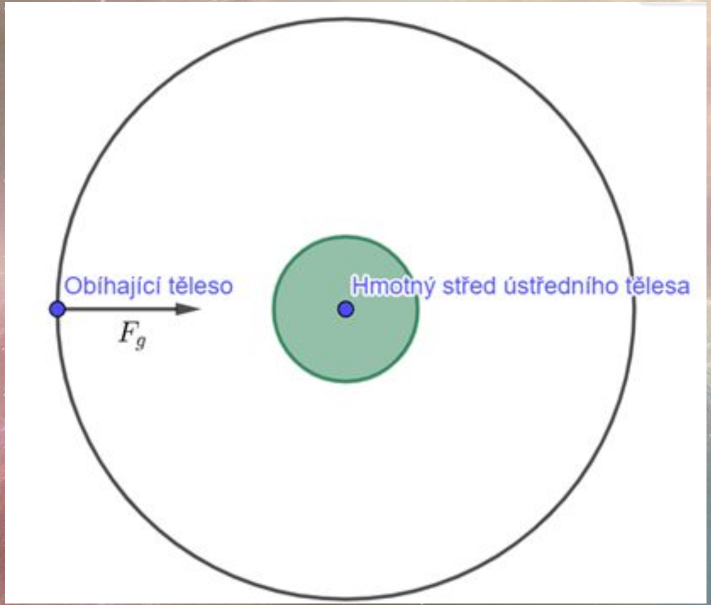
První matematický popis gravitace
Síla jako základní pojem

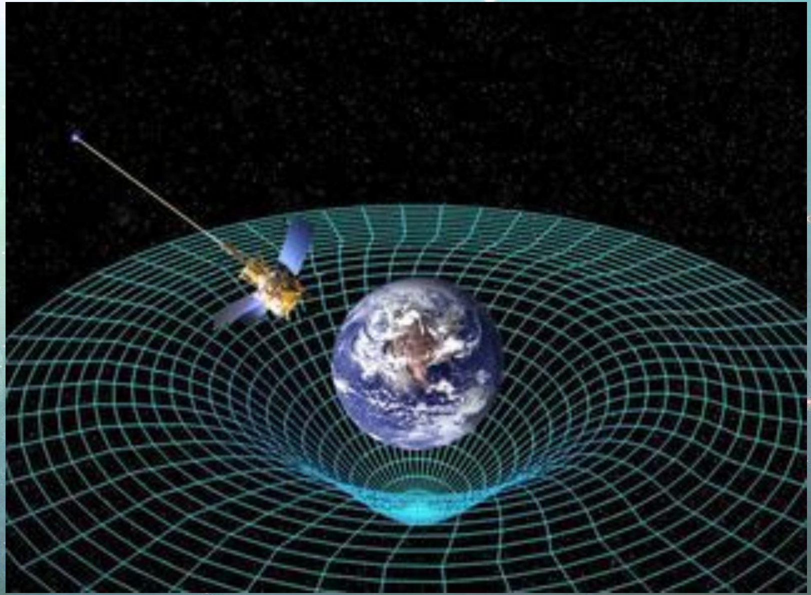


Albert Einstein (1879-1955)

Nový pohled na gravitaci
Sílu nahrazuje pokřivením prostoru (a času)

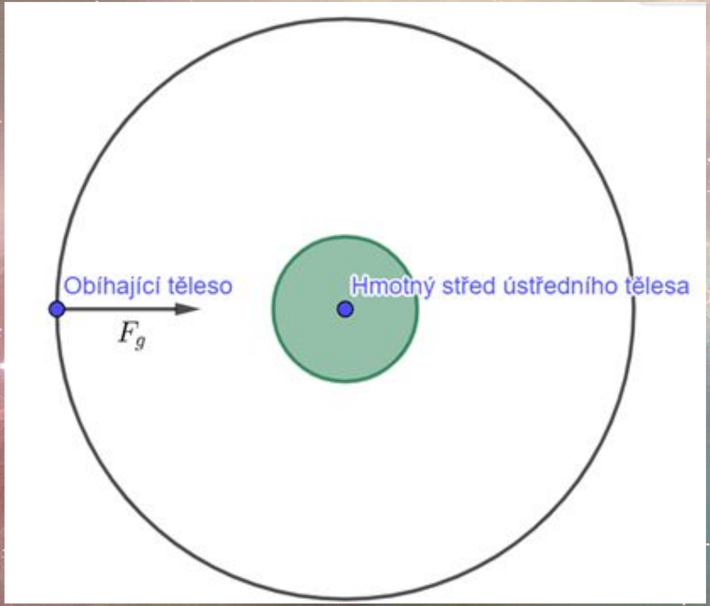
Vsuvka: Jaký je dnešní pohled na gravitaci?





Musí být Newtonův zákon tak komplikovaný?

- Podívejme se na pohyb po kružnici:



$$F_{\mathrm{G}} = F_{\mathrm{d}}$$

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

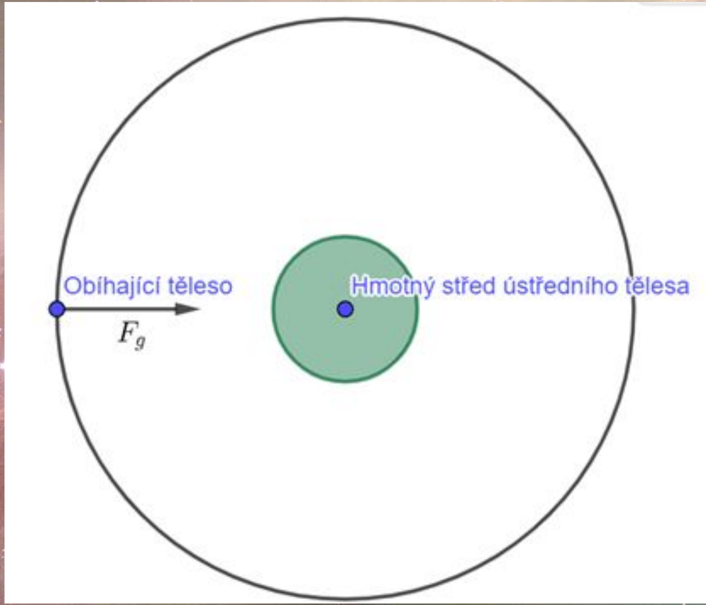
$$\frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2}M$$

$$\frac{r^3}{T^2} = \text{konstanta}$$

Musí být Newtonův zákon tak komplikovaný?

- Podívejme se na pohyb po kružnici:



gravitační síla hraje roli dostředivé síly

$$F_\mathrm{G} = F_\mathrm{d}$$

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

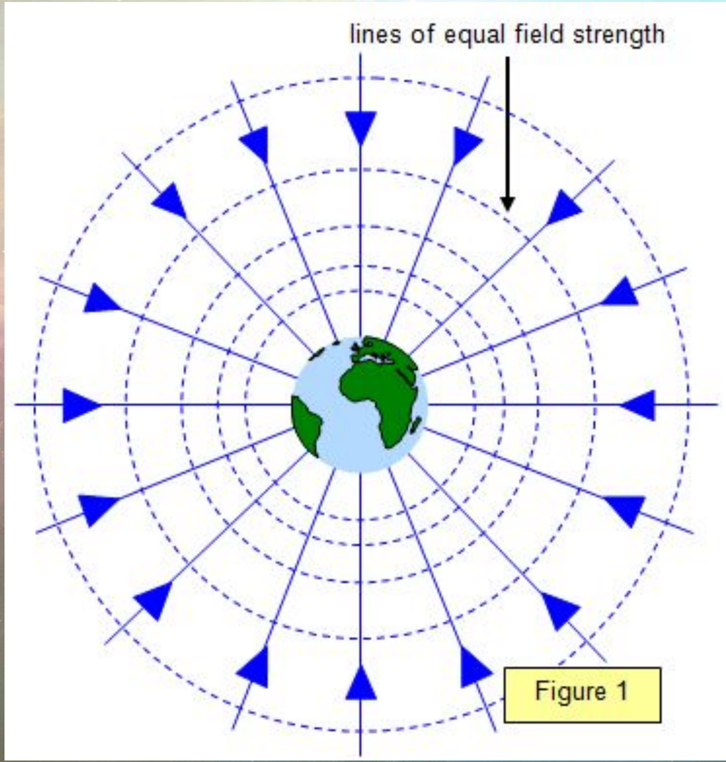
$$\frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2}M$$

$$\frac{r^3}{T^2} = \mathrm{konstanta}$$

3. Keplerův zákon!

Radiální a homogenní gravitační pole



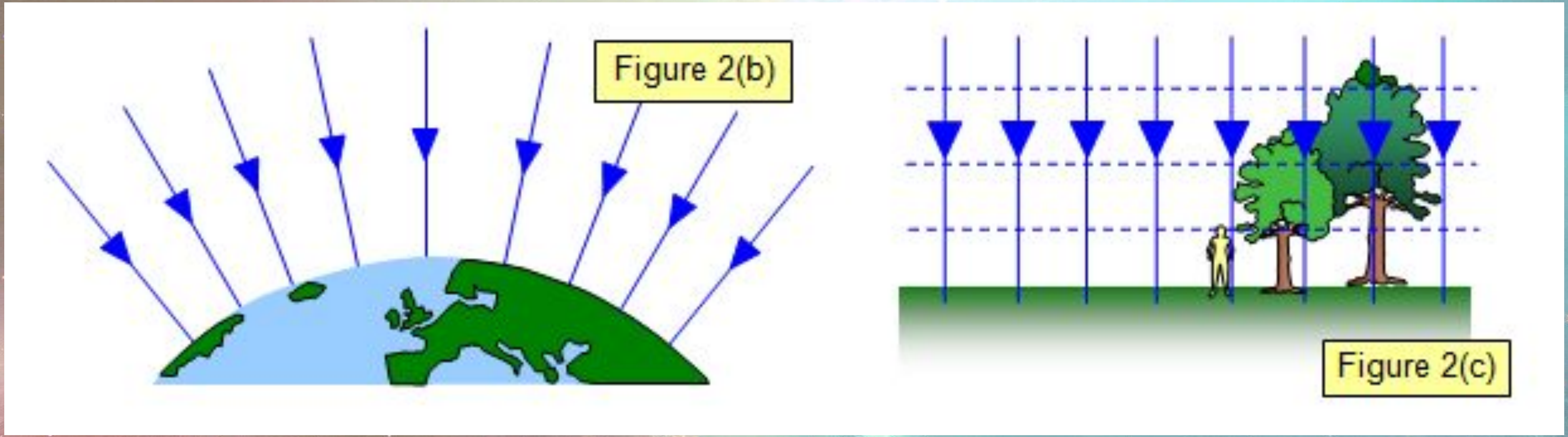
$$F_G = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$I = \frac{F_G}{m} = G\frac{M}{r^2}$$

Intenzita gravitačního pole

Zdroj:
https://www.schoolphysics.co.uk/age16-19/Mechanics/Gravitation/text/Gravitational_potential_gradient/index.html

Radiální a homogenní gravitační pole



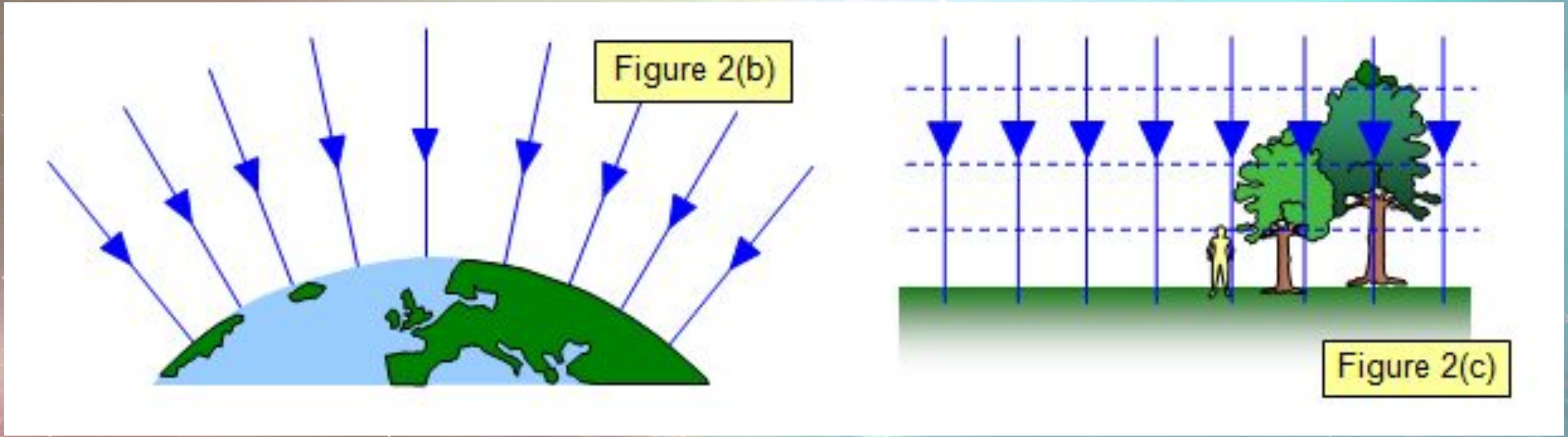
$$F_{\mathrm{G}} = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$I = \frac{F_{\mathrm{G}}}{m} = G\frac{M}{r^2}$$

$$I = G\frac{M}{R^2} = \text{konstanta} = g$$

$$F_{\mathrm{G}} = mg$$

Radiální a homogenní gravitační pole



$$E_p = -G\frac{Mm}{r}$$

$$E_p = mgh$$

Radiální a homogenní gravitační pole

- Přechod od radiálního k homogennímu poli:

$$E_p = -\frac{GMm}{R+h} = -\frac{GMm}{R}\frac{1}{1+\frac{h}{R}}$$

$$\frac{1}{1+\frac{h}{R}} = \left(1+\frac{h}{R}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{h}{R} \qquad \leftarrow (1+x)^n \approx 1 + nx$$

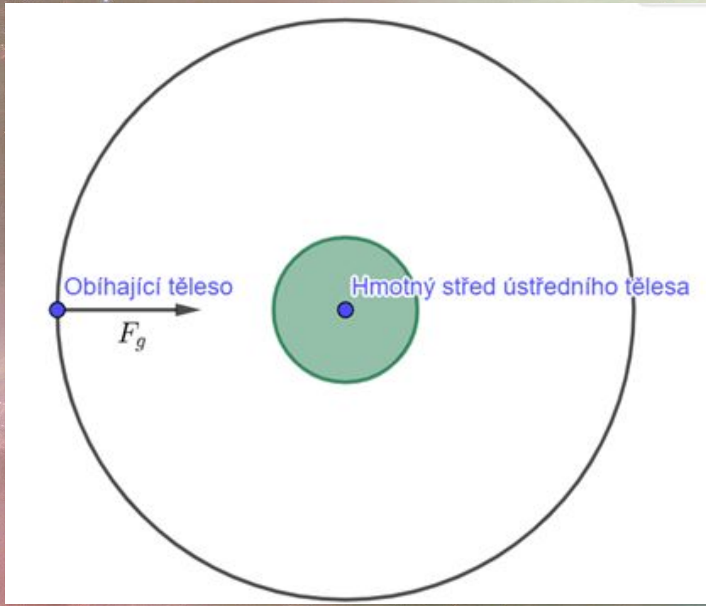
pro *x* malé

$$\rightarrow$$

$$E_p = \frac{GMm}{R^2}h + \text{konst.} = mgh + \text{konst.}$$

konstantu lze ignorovat

Pohyb v centrálním poli – energie



$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r} - G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{2r}$$

energie je záporná (vazebná)

Všimněte si: $\frac{E_k}{E_p} = -\frac{1}{2} \rightarrow 2E_k + E_p = 0$ ← obdobnou rovnici splňují i další systémy, které jsou gravitačně vázané a stabilní (Viriálová věta)

Druh pohybu podle energie

1. $E < 0$: kružnice, elipsa $$E = -G\frac{Mm}{2r}, \quad E = -G\frac{Mm}{2a}$$

2. $E = 0$: parabola

3. $E > 0$: hyperbola $$E = G\frac{Mm}{2a}$$